TAREAS DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS – 4º DE ESO (Del 11 al 22 de mayo) – Carlos Ojeda

Si hay alguna duda, pregunta al correo: cojeda@iesvalledelsol.es

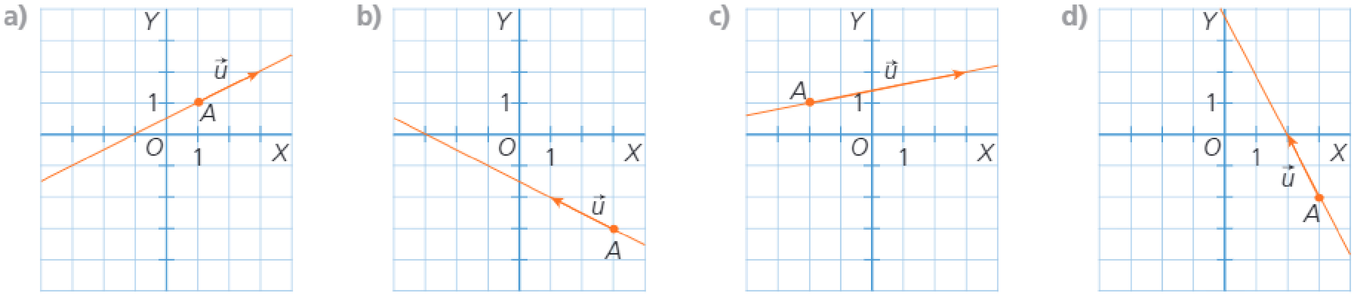
Hay que enviar fotos antes del sábado 23/5/20 (incluido) de los ejercicios nuevos que habéis hecho estas semanas a cojeda@iesvalledelsol.es . Solo voy a comprobar que estén hechos o intentados, no voy a comprobar las soluciones, así que no os preocupéis si no está todo bien, pero quiero saber que hacéis y no hacéis.

Os volveré a enviar una plantilla con las soluciones.

Lunes 11/5/20:

¡Hola a todos! Espero que hayáis pasado una buena semana. Vamos a empezar corrigiendo lo que hicisteis la semana pasada. De la página 177, los ejercicios: 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 25.

17 Observa las gráficas y determina la ecuación vectorial de las rectas en cada caso.



a) $(x, y) = (1, 1) + \lambda(2, 1)$

b) $(x, y) = (3, -3) + \lambda(-2, 1)$

c) $(x, y) = (-2, 1) + \lambda(5, 1)$

d) $(x, y) = (3, -2) + \lambda(-1, 2)$

18 Escribe la expresión de la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto A y tiene por vector director $\vec{u}$.

a) $(x, y) = (2, 0) + \lambda(1, 4)$

b) $(x, y) = (-1, 2) + \lambda(4, -2)$

19 Una recta pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 1)$. Averigua:

a) Su vector director.

b) La ecuación vectorial de la recta.

a) $\vec{u} = (2 - 1, 1 - (-3)) = (1, 4)$

b) $(x, y) = (1, -3) + \lambda(1, 4)$

20 Una recta pasa por el punto $A(3, 4)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (-1, 3)$. Determina cuatro puntos más por los que pasa dicha recta.

La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y) = (3, 4) + \lambda(-1, 3)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Para $\lambda = 1$: $(x, y) = (3, 4) + (-1, 3) = (2, 7)$

Para $\lambda = 2$: $(x, y) = (3, 4) + 2(-1, 3) = (1, 10)$

Para $\lambda = -1$: $(x, y) = (3, 4) + (-1)(-1, 3) = (4, 1)$

Para $\lambda = -2$: $(x, y) = (3, 4) + (-2)(-1, 3) = (5, -2)$

21 Decide qué puntos entre los siguientes pertenecen a la recta r: $(x,\ y) = (-1,\ 2) + \lambda(3,\ 1)$.

a) $A(2, 3)$ **b)** $B(1, -3)$ **c)** $C(-4, 1)$ **d)** $D(0, 2)$

a) $(2,\ 3) = (-1,\ 2) + \lambda(3,\ 1) \rightarrow \begin{cases} 2 = -1 + 3\lambda \\ 3 = 2 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \rightarrow$ $A(2, 3)$ pertenece a la recta.

b) $(1, -3) = (-1,\ 2) + \lambda(3,\ 1) \rightarrow \begin{cases} 1 = -1 + 3\lambda \\ -3 = 2 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -5 \end{cases} \rightarrow$ $B(1, -3)$ no pertenece a la recta.

c) $(-4,\ 1) = (-1,\ 2) + \lambda(3,\ 1) \rightarrow \begin{cases} -4 = -1 + 3\lambda \\ 1 = 2 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \rightarrow$ $C(-4, 1)$ pertenece a la recta.

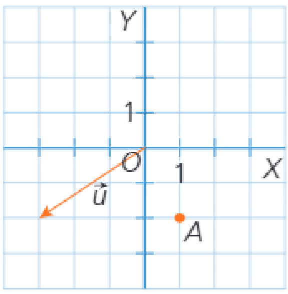
d) $(0,\ 2) = (-1,\ 2) + \lambda(3,\ 1) \rightarrow \begin{cases} 0 = -1 + 3\lambda \\ 2 = 2 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow$ $D(0, 2)$ no pertenece a la recta.

22 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 4)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (4,\ 7)$.

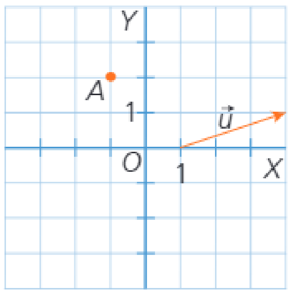
Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 4 + 7\lambda \end{cases}$

23 Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A en la dirección del vector $\vec{u}$.

a)



b)

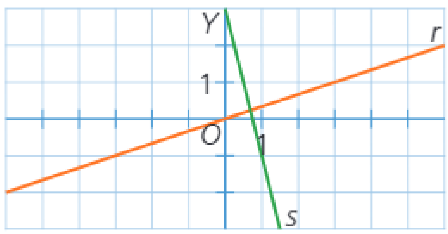


a) $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

25 Asigna a cada recta representada sus ecuaciones paramétricas.

a) $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$



a) Es la recta s. b) Es la recta r.

Para el 25, se puede hacer lambda=0, en los dos apartados y ver que en el apartado a sale el punto x=0, y=3,,, y en el apartado b, sale el punto x=0, y=0.

Corregid los ejercicios 28, 29 y 30 de la página 179:

28 Escribe la ecuación continua de la recta: $(x,\ y) = (-3,\ 2) + \lambda(4,\ 1)$

La ecuación continua es: $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{1}$

29 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (2,\ 5)$

La ecuación es: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5}$

30 Determina la ecuación continua de la recta: $\begin{cases} x = 6 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

La ecuación continua es: $\dfrac{x-6}{-4} = \dfrac{y-2}{1}$

Haced de la página 179, los ejercicios: 31 (pensad cual es el vector director), 32, 33, 34, 35, 36 y 37.

Miércoles 13/5/20:

Hay clases a las 11h15: Vamos a ver la teoría de las páginas 180 y 182. Y algunos ejercicios de las páginas 181 y 183.

Copiad el resumen que os dejo de los apuntes de la página 180:

5. ECUACIONES EXPLÍCITA Y GENERAL

* ECUACIÓN EXPLÍCITA:

Se obtiene despejando la variable dependiente (y) en la ecuación punto-pendiente.

Así, la ecuación explícita de la recta que pasa por un punto, $A(a_1,a_2)$, y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es:

$$y=\underbrace{\boxed{\frac{v_2}{v_1}}}_{m}x+\underbrace{\boxed{\left(-\frac{v_2}{v_1}a_1+a_2\right)}}_{n} \longrightarrow y=mx+n$$

siendo m la pendiente de la recta y n la ordenada en el origen.

Ejemplo: A partir de la ec. punto-pendiente $y-2=\frac{1}{4}\cdot(x-1)$:

$$y=\frac{1}{4}(x-1)+2 \rightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+2 \rightarrow y=\underbrace{\boxed{\frac{1}{4}}}_{m}x+\underbrace{\boxed{\frac{7}{4}}}_{n}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{4} \text{ es la pendiente de la recta} \\ n=\frac{7}{2} \text{ es la ordenada en el oigen} \end{cases}$$

* ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA:

Se obtiene agrupando todos los términos de la ecuación continua de la recta en un miembro.

Así, la ecuación general o implícita de la recta que pasa por un punto, $A(a_1,a_2)$, y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es:

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

siendo $A=v_2$, $B=-v_1$ y $C=v_1\cdot a_2-v_2\cdot a_1$

Ejemplo: A partir de la ec. punto-pendiente: $y-2=\frac{1}{4}\cdot(x-1)$:

$$4\cdot(y-2)=x-1 \rightarrow 4y-8=x-1 \rightarrow \boxed{x-4y+7=0}$$

⚠ Observación: Si despejamos la "y" en la ec. general, $Ax+By+C=0$:

$$By=-Ax-C \longrightarrow y=\underbrace{\boxed{\frac{-A}{B}}}_{m}x\underbrace{\boxed{-\frac{C}{B}}}_{n} \longrightarrow \begin{cases} m=\frac{-A}{B} \\ n=\frac{-C}{B} \end{cases}$$

y un vector director es $\vec{v}=(-B,A)$

Copiad el ejercicio resuelto y haced el ejercicio que aparece en el folio:

Ejercicio resuelto: Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(-2,5)$.

$A(1,2)$

$B(-2,5)$

vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2-1, 5-2) = (-3,3)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (1,2) + \lambda \cdot (-3,3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{3}$

Ec. punto - pendiente: $\dfrac{3}{-3} \cdot (x-1) = y - 2 \rightarrow$

$\rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x-1)$

Ecuación explícita: $y - 2 = -x + 1$

$y = -x + 1 + 2 \longrightarrow y = -x + 3$

Ec. implícita o general: $x + y - 3 = 0$

* Ejercicio: Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos $A(1,4)$ y $B(0,-1)$ en todas sus formas.

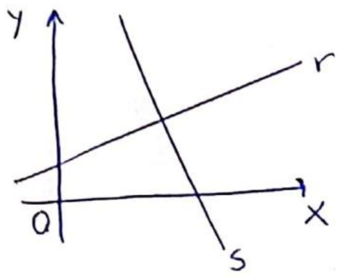
Jueves 14/5/20:

Página 181: haced los ejercicios 39, 40 (os fijáis en el resuelto de la página anterior), 41, 42, 44, 46 y 48

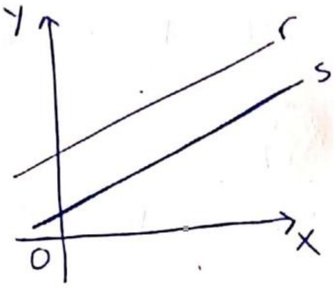
Viernes 15/5/20:

Copiad el resumen que os dejo de los apuntes de la página 182:

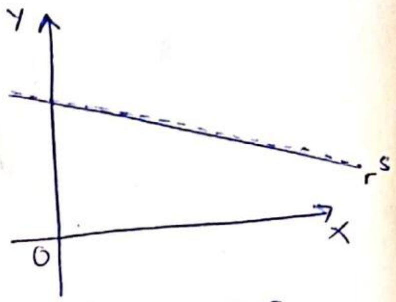
6. POSICIONES RELATIVAS DE 2 RECTAS EN EL PLANO



SECANTES



PARALELAS



COINCIDENTES

- Las rectas secantes tienen un único punto común
- Las rectas paralelas no tienen ningún punto común
- Las rectas coincidentes tienen infinitos puntos comunes.

CLASIFICACIÓN DE RECTAS:

Si una recta $r: Ax+By+C=0$, tiene por vector director $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y otra recta $s: A'x+B'y+C'=0$, tiene por vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$:

r y s	vectores directores	Pendientes	coeficientes de la ec. general
COINCIDENTES	$\frac{u_2}{u_1}=\frac{v_2}{v_1}$	Iguales	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$
PARALELAS	$\frac{u_2}{u_1}=\frac{v_2}{v_1}$	Iguales	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
SECANTES	$\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{v_2}{v_1}$	Distintas	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$

Ejemplo 1: Estudia la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: 2x-3y+4=0 \\ s: 4x-6y+8=0 \end{cases}$

Fijándonos en los coeficientes, se cumple:

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}=\frac{4}{8}$$

Por tanto, son rectas coincidentes.

Ejemplo 2: Estudia la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: 2x-3y+4=0 \\ s: 4x-6y+1=0 \end{cases}$

Fijándonos en los coeficientes, se cumple:

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\neq\frac{4}{1}$$

Por tanto, son rectas paralelas

Ejemplo 3: Estudia la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: 2x-3y+4=0 \\ s: 5x+y+4=0 \end{cases}$

Fijándonos en los coeficientes, se cumple:

$$\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{1}$$

Por tanto, son rectas secantes.

Hallamos el punto de corte de r y s:

$$\begin{cases} 2x-3y+4=0 \longrightarrow 2x-3\cdot(-5x-4)+4=0 \longrightarrow 2x+15x+12+4=0 \\ 5x+y+4=0 \longrightarrow y=-5x-4 \end{cases}$$

$$17x+16=0$$

$$\boxed{x=\frac{-16}{17}}$$

$$\hookrightarrow y=-5\cdot\left(\frac{-16}{17}\right)-4$$

$$\boxed{y=\frac{80}{17}-\frac{68}{17}=\frac{12}{17}}$$

El punto de corte es $\left(\frac{-16}{17}, \frac{12}{17}\right)$

Haced de la página 183: el 53 y el 54.

Leed de la página 183 el ejercicio resuelto y hacéis el 55. Dejo los apartados a y b hechos por el libro y el a hecho por mi de dos formas diferentes:

55 Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) $r: \begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$ $s: y=\frac{1}{3}x+5$

b) $r: y=4x+1$ $s: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}$

c) $r: \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{1}$ $s: y-2=\frac{1}{4}(x+3)$

d) $r: y+1=3(x-1)$ $s: 2x-3y+6=0$

a) Un vector director de la recta r es $\vec{u}=(-3,\ 1)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(3,\ 1)$, y como $\frac{3}{-3}\neq\frac{1}{1}$, los vectores no son proporcionales, por lo que las pendientes de las rectas no son iguales, y las rectas son secantes.

b) La pendiente de ambas rectas es $m=4$ por lo que pueden ser palalelas o coincidentes. Hallamos sus ecuaciones generales:

$\begin{cases} r: 4x-y+1=0 \\ s: 4x-y-5=0 \end{cases}$, y como $\frac{4}{4}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{-5} \rightarrow$ Son rectas paralelas.

55a) Posición relativa de r y s

$$r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \longrightarrow \text{vector director de } r: \vec{u} = (-3, 1)$$

$$s: y = \frac{1}{3}x + 5 \longrightarrow \frac{1}{3}x - y + 5 = 0 \longrightarrow \text{vector director de } s: \vec{v} = \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

Opción 1:

$$\frac{-3}{1} \neq \frac{1}{1/3} \longrightarrow \text{RECTAS SECANTES}$$

Opción 2:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \lambda = \dfrac{x-1}{-3} \\ \lambda = \dfrac{y-2}{1} \end{matrix} \longrightarrow \frac{x-1}{-3} = y - 2 \rightarrow x - 1 = -3y + 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 7 = -3y$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{3} \equiv r}$$

pendiente: $\frac{-1}{3}$

Pendiente de s: $\frac{1}{3}$ como $\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{3} \rightarrow$ Rectas secantes

Lunes 18/5/20:

Haced de la página 183: 56, 57, 58 y 59. Leed el ejercicio resuelto y hacéis el 60 y 61.

59 Halla la ecuación de una recta paralela a r y que pase por el punto $A(1, 2)$.

a) r: $2x - 3y - 1 = 0$

b) r: $2x + y + 1 = 0$

c) r: $5x + 3y + 2 = 0$

d) r: $x - 3y - 2 = 0$

a) Por ser paralela a r: $2x - 3y + C = 0$

Por pasar por $A(1, 2)$: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 4$, la recta pedida es: $2x - 3y + 4 = 0$

b) Será de la forma: $2x + y + C = 0$

Por pasar por $A(1, 2)$: $2 \cdot 1 + 2 + C = 0 \rightarrow C = -4$, así, la recta pedida es: $2x + y - 4 = 0$

Miércoles 20/5/20:

Hay clases a las 11h15: Vamos a empezar el tema 9. Funciones. Vamos a verlo por otros apuntes distintos de los del libro. En este tema vamos a ver el dominio, límites, asíntotas y continuidad de funciones.

En la clase de hoy vemos, dominio y límites de funciones.

Tenéis que copiar los apuntes del siguiente folio (donde pone 1.1. podéis poner 1 y donde pone 1.2 ponéis 2). En el apartado 1.2. cuando pone los ejemplos de las funciones a trozos no tiene nada que ver:

- las expresiones algebraicas que son funciones a trozos
- las fotos que son ejemplos de representación de funciones a trozos

Pero no coinciden expresión algebraica y representación de la función aunque estén arriba y abajo son todos ejemplos diferentes.

NO ME IMPORTA QUE RESUMÁIS COPIANDO, PERO POR FAVOR ENTEDED TODO Y SINO PREGUNTÁIS

1.1 Concepto de Dominio de una función

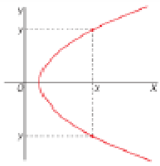
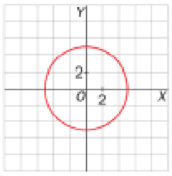
Función: es una regla que asigna a cada número real X un único número real Y.

$X \in Dom \subset \mathcal{R}$ $\quad Dom \to \mathcal{R}$ $\quad x \to f(x)$ $\quad y = f(x)$

Ejemplos: $f(x) = x + 2$; $y = x^2 - 5x + 4$; $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 7$; $y = \frac{x+2}{x-3}$; $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $y = 3^x$

La X es la variable independiente

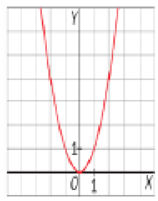
La Y es la variable dependiente, ya que depende del valor de X.

$f(x)$ es único para cada valor de $X \in Dom$

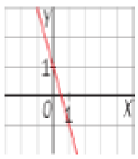
Las dos de la izquierda no son funciones, la de la derecha sí.

En una función, una línea vertical no puede cortar a la gráfica en dos puntos distintos

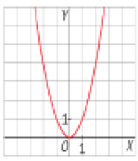


Dominio: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable X. $Dom\ f(x)$

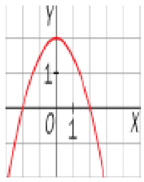
Imagen ó Recorrido: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable Y.



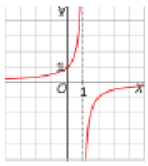
$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R}$



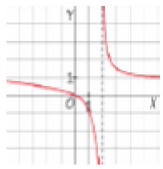
$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R}$



$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R}$



$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R} - \{1\}$

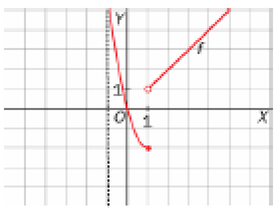


$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R} - \{2\}$

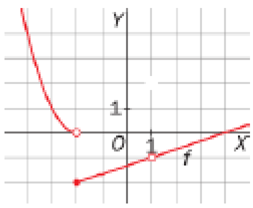
1.2 Funciones a trozos

Función a trozos: Es aquella en la que la regla que asigna a cada número real X un único número real Y, es diferente dependiendo del tramo en el que se encuentre la X.

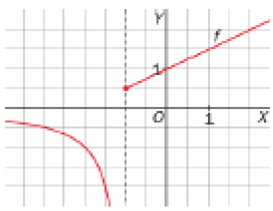
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & si \quad x \leq 0 \\ x^3 - 4x^2 & si \quad 0 < x \leq 4 \\ 1 - \frac{4}{x} & si \quad x > 4 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 & si \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$



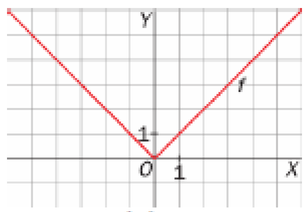
$Dom\ f(x)$: (-1, +∞)



$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R} - \{1\}$



$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R}$



$Dom\ f(x)$: $\mathbb{R}$

Jueves 21/5/20: Copiad los apuntes y haced el ejercicio 1.

1.3 Dominios de funciones:

- **Polinómicas:** $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R}$ La X puede tomar cualquier valor entre $(-\infty, +\infty)$

  Ejemplos: $f(x) = x - 3$ $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $f(x) = x^3 - 1$ $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R}$

- **Función racional:** es el cociente de dos funciones polinómicas.
  El cociente no existirá para los valores que hagan que el denominador valga 0.
  $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R} - \{$valores que anulen denominador$\}$
  Igualamos el denominador a cero, para ver qué valores anulan el denominador, y resolvemos la ecuación.

  Ejemplo: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ $\rightarrow$ $x - 1 = 0$ $\rightarrow$ $x = 1$ $\rightarrow$ $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R} - \{1\}$

  Función de proporcionalidad Inversa $\rightarrow f(x) = \frac{k}{x} \rightarrow$ Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Función exponencial:** es un número real elevado a una función $\rightarrow$ $f(x) = a^{g(x)}$
  El dominio será semejante al de la función del exponente.
  Ejemplos: $f(x) = e^{-x+1}$ ó $f(x) = 3^{x+2}$ $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R}$ ya que el exponente es un polinomio.
  Ejemplo: $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ $Dom\, f(x)$ es el dominio de $\frac{1}{x}$ $\rightarrow$ $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Función irracional :** $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$
  - Con n impar: El dominio será el de $g(x)$.
    Ejemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ $Dom\, f(x)$ es el dominio de $x^2 - 1$ $\rightarrow$ $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R}$
  - Con n par: $f(x)$ no puede ser negativa. Tiene que ser nula o positiva $\rightarrow$ $g(x) \geq 0$.
    Resolvemos la inecuación $g(x) \geq 0$.
    Vemos para qué valores se anula la función y damos valores a ambos lados, para ver cuándo es positiva y cuando es negativa.
    Si no podemos anular la función es que siempre es positiva o siempre es negativa. Damos cualquier valor y si es positiva la función para ese valor, siempre será positiva, en caso contrario siempre será negativa.
    Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $\rightarrow$ $g(x) \geq 0$ $\rightarrow$ $g(x) = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 1 = 0$
    $\rightarrow$ $x^2 = 1$ $\rightarrow$ $x = \pm 1$ + | − | +
    $Dom\, f(x)$: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ -1 1

- **Función logarítmica:** $f(x) = \log_a g(x)$
  $g(x)$ no puede ser nula ni negativa. Tiene que ser positiva $\rightarrow$ $g(x) > 0$.
  Si $g(x)$ es nula o negativa el logaritmo no se puede realizar. No existirá la función para esos valores.
  Existe solamente para aquellos valores en los que $g(x)$ es positiva, o sea cuando la función está por encima del eje de las X.
  Resolvemos la inecuación $g(x) > 0$.
  $f(x)$ es negativa o nula, el logaritmo no puede realizarse, no existirá el logaritmo.
  Por lo tanto resolvemos la inecuación $f(x) > 0$.
  Vemos para qué valores se anula la función y damos valores a ambos lados, para ver cuándo es positiva y cuando es negativa.
  Si no podemos anular la función es que siempre es positiva o siempre es negativa. Damos cualquier valor y si es positiva la función para ese valor, siempre será positiva, en caso contrario siempre será negativa.
  Ejemplo: $f(x) = log(x^2 + 1)$ $\rightarrow$ $g(x) > 0$ $\rightarrow$ $g(x) = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 1 = 0$
  $\rightarrow$ $x^2 = -1 \rightarrow$ Sin solución. O siempre es positiva o siempre es negativa.
  Damos un valor cualquiera $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $x^2 + 1 = 1$ $\rightarrow$ Siempre + +
  $Dom\, f(x)$: $\mathbb{R}$

- **Función a trozos:** Se debe analizar qué ocurre en cada intervalo (el dominio de cada rama).
  Se realizará la unión de cada dominio, para dar el dominio de toda la función.

  Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{x+1} & si \quad x \leq 0 \\ \frac{3}{x+3} & si \quad x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1 \ \in Rama \\ x+3 \neq 0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3 \ \notin Rama \end{cases} \rightarrow Dom\, f(x) : \mathbb{R} - \{-1\}$

➢ **Ejercicio 1: Halla el dominio de:**

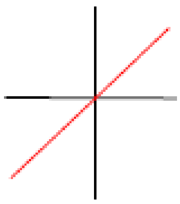
a) $g(x) = x^2 - 3x$ b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$ c) $y = \frac{-3}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

e) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \ln(x+2)$ g) $f(x) = e^{4+5x}$ h) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

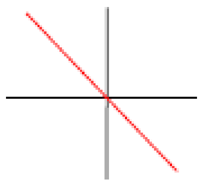
i) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \leq 1 \\ \frac{x+1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$ j) $B(t) = \begin{cases} t & si \quad t < 0 \\ \frac{t}{t-1} & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ k) $B(t) = \begin{cases} -\frac{2}{t+2} & si \quad t \leq 0 \\ \frac{2}{t-2} & si \quad t > 0 \end{cases}$

1.4 Esbozos de funciones.

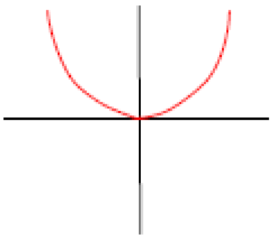
$f(x) = x$



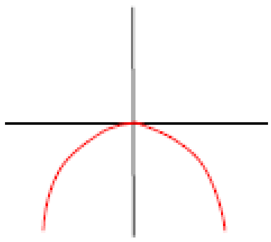
$f(x) = -x$



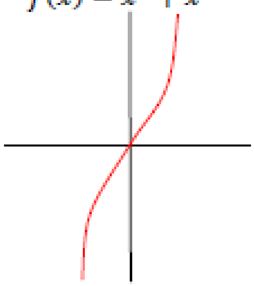
$f(x) = x^2$



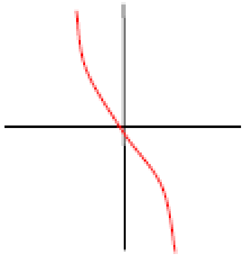
$f(x) = -x^2$



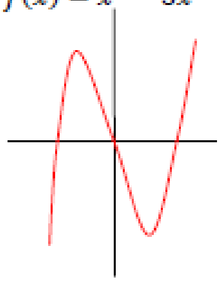
$f(x) = x^3 + x$



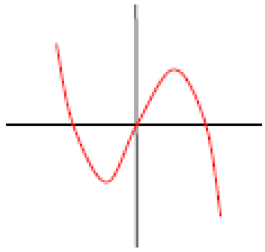
$f(x) = -x^3 - x$



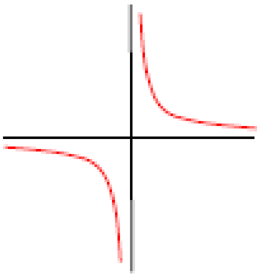
$f(x) = x^3 - 3x$



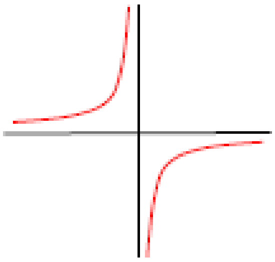
$f(x) = -x^3 + 3x$



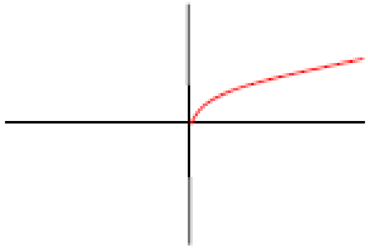
$f(x) = \frac{1}{x}$



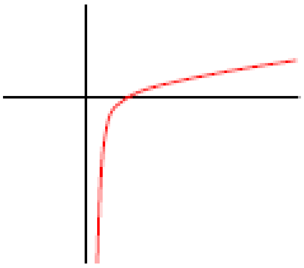
$f(x) = -\frac{1}{x}$



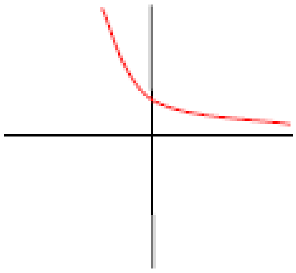
$f(x) = \sqrt{x}$



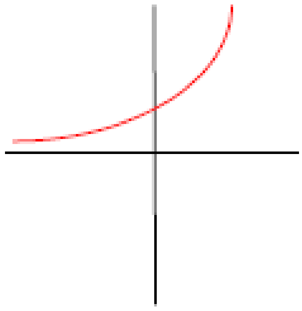
$f(x) = \ln x$



$f(x) = e^{-x}$



$f(x) = e^{x}$



Viernes 22/5/20: Copiad los apuntes y haced los ejercicios 2 y 3.

1.5 Límites de una función en un punto.

- Veamos en esta gráfica los siguientes puntos:
  - $\boldsymbol{f(a)}$: Es el valor de Y cuando la X vale *"a"*.

    Ejemplo: $f(1) = 2$ $f(2) = 2$ $f(3) = 4$ $f(4) = \nexists$ $f(5) = \nexists$
  - $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$: El límite de la función cuando X tiende a *"a"* por la izquierda.

    Queremos saber a qué valor se aproxima la Y cuando la X se aproxima cada vez más a *"a"* por su izquierda, o sea, con valores menores que *"a"*.

    Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3{,}5$ $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 3$
  - $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$: El límite de la función cuando X tiende a *"a"* por la derecha.

    Queremos saber a qué valor se aproxima la Y cuando la X se aproxima cada vez más a *"a"* por su derecha, o sea, con valores mayores que *"a"*.

    Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 5{,}5$ $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3{,}5$ $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 1$
  - **Límites laterales:** A hallar estos dos límites anteriores se les llama hallar los límites laterales.
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x)$: El límite de la función cuando X tiende a *"a"*.

    Queremos saber a qué valor se aproxima la Y cuando la X se aproxima cada vez más a *"a"*. Pero como hemos visto a la *"a"* nos podemos aproximar de formas distintas, por la izquierda y por la derecha.

    Sólo existirá el límite cuando ambos límites laterales coincidan.

    Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \nexists$ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3{,}5$ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \nexists$

    Por lo tanto, se puede afirmar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, solamente cuando ambos límites laterales coinciden con b, y quiere decir que cuando X tome valores próximos al número "a", tanto mayores como menores, los valores de Y se aproximarán al número b.

- **Discontinuidad de $f(x)$ en $x = a$:** Se dice que una función no es continua en un punto (en $x = a$) cuando no existe $f(a)$, o no existe el límite cuando X tiende a "a" (no coinciden los laterales), o no coinciden ambos.
  Ejemplo: En la gráfica la función no es continua en: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$
  Diremos que la función de la gráfica es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3, 4, 5\}$

○ Veamos en una función analítica: En una función deberemos de ir sustituyendo los valores para ver qué ocurre.
Sea la función $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$

- **$f(a)$:** Es sustituir en la función el valor "a" y ver cuánto da.
  Ejemplo: $f(-2) = 0$ $f(0) = \nexists$ $f(3) = 5$
- **$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$:** Hay que sustituir en la función varios valores menores que "a", pero cada vez acercándonos más a "a" por su izquierda, y ver a qué se va acercando el valor de la Y.
  Ejemplo: Para ver $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ → hallaremos $f(-2{,}01) = -0{,}01$ $f(-2{,}001) = -0{,}001$ $f(-2{,}0001) = -0{,}0001$
  $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0$
  Ejemplo: Para ver $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ → hallaremos $f(-0{,}01) = 1{,}99$ $f(-0{,}001) = 1{,}999$ $f(-0{,}0001) = 1{,}9999$
  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
  Ejemplo: Para ver $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ → hallaremos $f(2{,}99) = 4{,}99$ $f(2{,}999) = 4{,}999$ $f(2{,}9999) = 4{,}9999$
  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$
- **$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$** Hay que sustituir en la función varios valores menores que "a", pero cada vez acercándonos más a "a" por su izquierda, y ver a qué se va acercando el valor de la Y.
  Ejemplo: Para ver $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ → hallaremos $f(-1{,}99) = 0{,}01$ $f(-1{,}999) = 0{,}001$ $f(-1{,}9999) = 0{,}0001$
  $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$

  Ejemplo: Para ver $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ → hallaremos $f(0{,}01) = 2{,}01$ $f(0{,}001) = 2{,}001$ $f(0{,}0001) = 2{,}0001$
  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
  Ejemplo: Para ver $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ → hallaremos $f(3{,}01) = 5{,}01$ $f(3{,}001) = 5{,}001$ $f(3{,}0001) = 5{,}0001$
  $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 5$

1.6 Cálculo de límites.
En el apartado anterior se ha calculado el valor del límite de una función en un punto, dando valores aproximados a la variable independiente y utilizando una tabla y una calculadora como herramientas.
Sin embargo en muchas ocasiones el cálculo se puede realizar de una forma más directa y rápida.

Para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se sustituye la X por el valor al que se aproxima. Si el resultado es b, ya tenemos el límite de X cuando tiende al número a. En estos casos se obtienen expresiones y resultados que tienen sentido en $\mathbb{R}$, y los límites se llaman determinados. Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x+8}{x-2} = \frac{4+8}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$

- **¿En qué casos no es válida esta regla para hallar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?**
  - En los puntos que no pertenecen al dominio de la función. Allí no podremos sustituir ese valor.
    Ejemplo: $Dom f(x): \Re - \{3\}$ en $x = 3$ tendremos que hallar los límites laterales
  - En los puntos que están en el límite del dominio de la función.
    Ejemplo: $Dom f(x): \Re - [5, +\infty)$ en $x = 5$ tendremos que hallar los límites laterales
  - En las funciones a trozos, en los puntos que aparecen en las ramas.
    Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x - 5 & si \quad x \le 0 \\ 2x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$ tendremos que hallar los límites laterales.

➢ **Ejercicio 2: Calcula el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $f(a)$ ¿Coinciden? ¿Qué significa?**

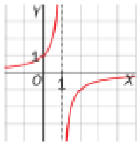
a) $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x = 2$ b) $g(x) = \frac{2x+10}{x+5}$ en $x = -5$ c) $h(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$ en $x = 1$

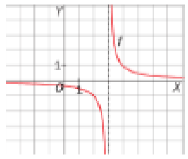
d) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & si \quad x \le 0 \\ \frac{1}{x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$ f) $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \le 1 \\ x^3 - x + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$ en $x = 3$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & si \quad x < 1 \\ \frac{x}{x-1} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ en $x = 1$

1.7 Límites Infinitos.

A veces nos encontramos que los límites laterales tienden a $+\infty$ ó a $-\infty$





a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

Ejemplo: Calcula $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \end{cases}$

x	f(x)
2,9	-10
2,99	-100
2,999	-1000
3,001	1000
3,01	100
3,1	10

- **Ejercicio 3: Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+2}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+3}{x}$