TAREAS DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS – 4º DE ESO (Del 25 de mayo al 29 de mayo) – Carlos Ojeda

Si hay alguna duda, pregunta al correo: cojeda@iesvalledelsol.es.

Hay que enviar fotos antes del sábado 30/5/20 (incluido) de los ejercicios que habéis hecho nuevos esta semana a cojeda@iesvalledelsol.es .

Lunes 25/5/20:

Corregid de la página 179, los ejercicios 31, 32, 33, 34, 35, 36 y 37.

31 Halla la ecuación continua de una recta, sabiendo que dos de los puntos por los que pasa son $A(1, 3)$ y $B(2, 5)$.

La ecuación continua es: $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{5-3} \rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$

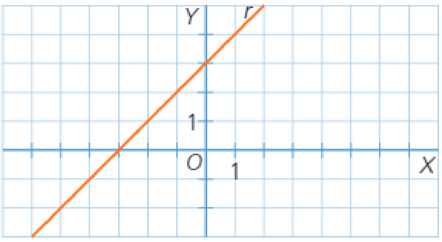
32 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (2, 5)$ en forma punto-pendiente.

La ecuación es: $y-3 = \frac{5}{2}(x-1)$

33 Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y cuya pendiente es 4. ¿Qué ángulo forma la recta con el eje de abscisas?

La ecuación es $y-3 = 4(x-2)$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas es: $\alpha = \text{arc tg } 4 = 75{,}96^\circ = 75^\circ\, 57'$

34 Observa la recta representada.



a) Escribe la ecuación continua.
b) Halla su pendiente.
c) Calcula la ecuación punto-pendiente.
d) Averigua el valor del ángulo que forma con el eje de abscisas.
e) ¿Cuánto mide el ángulo que forma con el eje de ordenadas?

a) Pasa por $A(0, 3)$ y $B(-3, 0)$: $\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y-3}{0-3} \rightarrow \frac{x}{-3} = \frac{y-3}{-3}$

b) $m = 1$ c) $y-3 = 1(x-0)$ d) $\alpha = \text{arc tg } 1 = 45^\circ$ e) 45°

35 Halla dos de los puntos por los que pasan cada una de estas rectas.

a) $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{5-0}$

b) $y-1=2(x-4)$

a) Si $x=0$: $\frac{-1}{3-1}=\frac{y-0}{5-0} \rightarrow y=-\frac{5}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{5}{2}\right)$

Para $x=1$: $\frac{0}{3-1}=\frac{y-0}{5-0} \rightarrow y=0 \rightarrow (1, 0)$

b) Si $x=4$: $y-1=2(4-4) \rightarrow y=1 \rightarrow (4, 1)$

Para $x=0$: $y-1=2(0-4) \rightarrow y=-7 \rightarrow (0, -7)$

36 Calcula la ordenada en el origen de las rectas propuestas.

a) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}$

b) $y+1=3(x-1)$

a) $\frac{0-1}{1}=\frac{y+1}{2} \rightarrow y=-3$ es la ordenada en el origen.

b) $y+1=3(0-1) \rightarrow y=-4$ es la ordenada en el origen.

37 Decide si los puntos $A(3, 5)$ y $B(3, 3)$ pertenecen a las siguientes rectas.

a) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}$

b) $y+1=3(x-1)$

a) $\frac{3-1}{1} \neq \frac{5+1}{2} \rightarrow A(3, 5)$ no pertenece a la recta.

$\frac{3-1}{1}=\frac{3+1}{2} \rightarrow B(3, 3)$ pertenece a la recta.

b) $5+1=3(3-1) \rightarrow A$ pertenece a la recta.

$3+1 \neq 3(3-1) \rightarrow B$ no pertenece a la recta.

Corregid el ejercicio:

Ejercicio: Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos $A(1,4)$ y $B(0,-1)$ en todas sus formas:

$A(1,4)$

$B(0,-1)$

vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0-1, -1-4) = (-1,-5)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (1,4) + \lambda \cdot (-1,-5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 4 - 5\lambda \end{cases}$

Ecuación continua:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{-5}$$

Ec. punto - pendiente: $\frac{-5}{-1}(x-1) = y-4$

$5\cdot(x-1) = y-4 \rightarrow y-4 = 5\cdot(x-1)$

Ec. explícita: $y-4 = 5x-5$

$y = 5x-1$

Ec. implícita o general: $5x - y - 1 = 0$

o $y - 5x + 1 = 0$ o $-5x + y + 1 = 0$

Corregid de la página 181, los ejercicios 39, 40, 41, 42, 44, 46 y 48:

39 Determina la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, 0)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (-1, 1)$.

Partiendo de la ecuación continua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-0}{1} \rightarrow y = -x + 2$

40 Halla la pendiente, la ordenada en el origen y un vector director de cada recta.

a) $y = \frac{1}{3}x - 3$

b) $y = \frac{2}{5}x + 5$

c) $y = 4x - 1$

d) $y = -2x + 1$

a) $m = \frac{1}{3}, n = -3$

b) $m = \frac{2}{5}, n = 5$

c) $m = 4, n = -1$

d) $m = -2, n = 1$

41 Escribe la ecuación explícita de la recta: $(x, y) = (-1, 4) + \lambda(4, 1)$

La ecuación punto pendiente es: $y - 4 = \frac{1}{4}(x+1) \rightarrow$ La ecuación explícita es: $y = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$

42 Determina la ecuación explícita de las rectas.

a) $\begin{cases} x = 6 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

b) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1}$

a) La ecuación punto-pendiente es: $y - 2 = -\frac{1}{4}(x-6) \rightarrow$ La ecuación explícita es: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

b) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} \rightarrow y + 1 = -\frac{1}{5}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$

44 Escribe la ecuación explícita de la recta que tiene pendiente 3 y pasa por el punto $A(2, 0)$.

La ecuación punto-pendiente es: $y - 0 = 3(x-2) \rightarrow$ La ecuación explícita es: $y = 3x - 6$

46 Averigua la ecuación general de la recta:

a) Que pasa por el punto $A(1, -2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, 2)$.

b) Si su ecuación vectorial es: $(x, y) = (-1, -4) + \lambda(2, 1)$

a) La ecuación punto-pendiente es: $y + 2 = 2(x-1) \rightarrow y + 2 = 2x - 2 \rightarrow 2x - y - 4 = 0$

b) La ecuación punto-pendiente es: $y + 4 = \frac{1}{2}(x+1) \rightarrow 2y + 8 = x + 1 \rightarrow x - 2y - 7 = 0$

48 Escribe la ecuación general de las rectas.

a) $\begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$

b) $y = \frac{2}{5}x + 5$

a) Su ecuación continua es: $\frac{x-6}{-1} = \frac{y-2}{2} \rightarrow 2x - 12 = -y + 2 \rightarrow 2x + y - 14 = 0$

b) $y = \frac{2}{5}x + 5 \rightarrow 5y = 2x + 25 \rightarrow 2x - 5y + 25 = 0$

Corregid de la página 183, los ejercicios 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60 y 61.

53 Describe la posición relativa de estas rectas.

a) $\begin{cases} r\colon 2x+5y+1=0 \\ s\colon 4x-6y+8=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r\colon x-y+4=0 \\ s\colon 2x-2y+8=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} r\colon x-3y=0 \\ s\colon 4x-12y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} r\colon 6x+2y+4=0 \\ s\colon 3x+y+5=0 \end{cases}$

a) $\frac{2}{4} \neq \frac{5}{-6} \rightarrow$ Secantes

c) $\frac{1}{4} = \frac{-3}{-12} \rightarrow$ Coincidentes

b) $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{4}{8} \rightarrow$ Coincidentes

d) $\frac{6}{3} = \frac{2}{1} \neq \frac{4}{5} \rightarrow$ Paralelas

54 Escribe la ecuación general de la recta que es paralela a la recta, $r\colon x-2y+3=0$ y que pasa por $A(1, 5)$.

Por ser paralela tenemos que: $x-2y+C=0$

Por pasar por A resulta: $1-10+C=0 \rightarrow C=9$

La recta pedida es: $x-2y+9=0$

55 Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) $r\colon \begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$ $s\colon y=\frac{1}{3}x+5$

b) $r\colon y=4x+1$ $s\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}$

c) $r\colon \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{1}$ $s\colon y-2=\frac{1}{4}(x+3)$

d) $r\colon y+1=3(x-1)$ $s\colon 2x-3y+6=0$

a) Un vector director de la recta r es $\bar{u}=(-3,\ 1)$ y un vector director de s es $\bar{v}=(3,\ 1)$, y como $\frac{3}{-3} \neq \frac{1}{1}$, los vectores no son proporcionales, por lo que las pendientes de las rectas no son iguales, y las rectas son secantes.

b) La pendiente de ambas rectas es $m=4$ por lo que pueden ser palalelas o coincidentes. Hallamos sus ecuaciones generales:

$\begin{cases} r: 4x-y+1=0 \\ s: 4x-y-5=0 \end{cases}$, y como $\frac{4}{4}=\frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{-5} \rightarrow$ Son rectas paralelas.

c) La pendiente de ambas rectas es $m=\frac{1}{4}$, pueden ser palalelas o coincidentes. Hallamos sus ecuaciones generales:

$\begin{cases} r: x-4y+11=0 \\ s: x-4y+11=0 \end{cases} \rightarrow$ Son rectas paralelas.

d) Las rectas son: $\begin{cases} r: 3x-y-4=0 \\ s: 2x-3y+6=0 \end{cases}$, como $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-3} \rightarrow$ Son rectas secantes.

56 Una recta, r, tiene por vector director $\bar{u}=(-1,\ 1)$ y pasa por el punto $A(3, 2)$, y otra recta, s, tiene por vector director $\bar{v}=(1,\ -1)$ y pasa por el punto $B(1, 4)$. Establece cuál es su posición relativa.

$r\colon \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{1} \rightarrow x+y-5=0$ $s\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-1} \rightarrow x+y-5=0$ Son rectas coincidentes.

57 Determina la posición relativa de las rectas r y s, sabiendo que la recta r forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas y que un vector director de la recta s es $\bar{v}=(-1,\ 1)$.

La pendiente de la recta r es $m_r=\text{tg } 45°=1$ y la recta s tiene por pendiente $m_s=-1$. Son rectas secantes.

58 Comprueba la posición relativa de las rectas y halla su punto de corte en el caso de que exista.

a) $r: 5x - y + 5 = 0$
$s: 10x - 2y + 10 = 0$

b) $r: (x, y) = (1, 2) + \lambda(3, 2)$
$s: 3x - y - 1 = 0$

c) $r: 5x - y + 1 = 0$
$s: x + 5y + 8 = 0$

a) $\frac{5}{10} = \frac{-1}{-2} = \frac{5}{10} \rightarrow$ Son rectas coincidentes.

b) Un vector director de r es $\bar{u} = (3, 2)$ y un vector director de s es $\bar{v} = (1, 3)$, como $\frac{1}{3} \neq \frac{3}{2}$, los vectores no son proporcionales, por lo que las rectas son secantes. El punto de corte es la solución del sistema:

$$\begin{cases} r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} \\ s: 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 9x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow -7x + 7 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ e } y = 2 \rightarrow (1, 2)$$

c) Como $\frac{5}{1} \neq \frac{-1}{5}$, las rectas son secantes. El punto de corte es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x + 5y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 25x - 5y + 5 = 0 \\ x + 5y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow 26x + 13 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x + 5y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ 5x + 25y + 40 = 0 \end{cases} \rightarrow -26y - 39 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

Las rectas se cortan en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

59 Halla la ecuación de una recta paralela a r y que pase por el punto $A(1, 2)$.

a) $r: 2x - 3y - 1 = 0$

b) $r: 2x + y + 1 = 0$

c) $r: 5x + 3y + 2 = 0$

d) $r: x - 3y - 2 = 0$

a) Por ser paralela a r: $2x - 3y + C = 0$
Por pasar por $A(1, 2)$: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 4$, la recta pedida es: $2x - 3y + 4 = 0$

b) Será de la forma: $2x + y + C = 0$
Por pasar por $A(1, 2)$: $2 \cdot 1 + 2 + C = 0 \rightarrow C = -4$, así, la recta pedida es: $2x + y - 4 = 0$

c) Será de la forma: $5x + 3y + C = 0$
Por pasar por $A(1, 2)$: $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = -11$, así, la recta pedida es: $5x + 3y - 11 = 0$

d) Será de la forma: $x - 3y + C = 0$
Por pasar por $A(1, 2)$: $1 - 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 5$, la recta pedida es, por tanto: $x - 3y + 5 = 0$

60 Halla un vector perpendicular a estas rectas.

a) $2x - 3y + 1 = 0$ b) $x + 3y + 6 = 0$ c) $5x - y + 1 = 0$ d) $2x + 3y + 4 = 0$

a) $\bar{v} = (2, -3)$ b) $\bar{v} = (1, 3)$ c) $\bar{v} = (5, -1)$ d) $\bar{v} = (2, 3)$

61 Determina la ecuación de una recta que pase por el punto $A(1, 2)$ y sea perpendicular a r.

a) $r: 2x - 3y - 1 = 0$ b) $r: 2x + y + 1 = 0$ c) $r: 5x + 3y + 2 = 0$ d) $r: x - 3y - 2 = 0$

Escribimos la ecuación continua de las rectas pedidas.

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3}$ b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$ c) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3}$ d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3}$

Corregid los ejercicios de los apuntes:

Ejercicio 1: Halla el dominio de:

(a) $g(x) = x^2 - 3x \longrightarrow$ Dom g: $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4} \longrightarrow x - 4 = 0 \longrightarrow x = 4 \longrightarrow$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R} - \{4\}$

(c) $y = \dfrac{3}{x} \longrightarrow x = 0 \longrightarrow$ Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \longrightarrow x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 = -1$ No tiene solución real

$\hookrightarrow$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = \sqrt{x-3} \longrightarrow x - 3 \geq 0 \longrightarrow x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

$-$ | $+$ (3) $\longrightarrow$ Dom $f(x)$: $[3, +\infty)$

Puedo incluirlo porque $\sqrt{3-3} = \sqrt{0}$, que existe y vale 0

(f) $f(x) = \ln(x+2) \longrightarrow x + 2 > 0 \longrightarrow x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$

$-$ | $+$ (-2) $\longrightarrow$ Dom $f(x)$: $(-2, +\infty)$

No se incluye -2 porque $\ln 0$ no se puede hacer

(g) $f(x) = e^{4+5x} \longrightarrow$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R}$

(h) $f(x) = e^{1/x} \longrightarrow$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R} - \{0\}$

porque Dom f = Dom $\dfrac{1}{x} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ porque el denominador se anula cuando $x = 0$

(i) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x+1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\longrightarrow x = 0 \notin$ Rama

Dom $f(x)$: $\mathbb{R}$

(j) $B(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t}{t-1}, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ $\longrightarrow t-1=0 \rightarrow t=1 \in$ Rama

Dom $B(t)$: $\mathbb{R} - \{1\}$

(k) $B(t) = \begin{cases} -\dfrac{2}{t+2}, & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{2}{t-2}, & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$t \leq 0 \longrightarrow t+2=0 \rightarrow t=-2 \in$ Rama

$t > 0 \longrightarrow t-2=0 \rightarrow t=2 \in$ Rama

Dom $B(t)$: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Ejercicio 2:

(a) $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x=2$

$\lim_{x\to 2} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$

$f(2) = \frac{3}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$

coinciden

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \longrightarrow f$ es continua en $x=2$

(b) $g(x) = \frac{2x+10}{x+5}$ en $x=-5 \longrightarrow$ Dom $g: \mathbb{R}-\{-5\}$

$x=-5 \notin$ Dom g

$-5'1$, $-5'01$, -5

$\lim_{x\to -5^-} \frac{2x+10}{x+5} = 2$

x	f(x)
-5'1	2
-5'01	2
-5'001	2

$\lim_{x\to -5^+} \frac{2x+10}{x+5} = 2$

x	f(x)
-4'9	2
-4'99	2
-4'999	2

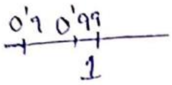
$\Rightarrow \lim_{x\to -5} \frac{2x+10}{x+5} = 2$ porque coinciden los límites laterales

$f(-5) = \nexists$

Entonces $\lim_{x\to -5} f(x) \neq f(-5)$

Por tanto, f no es continua en $x=-5$

ⓒ $h(x) = \dfrac{-2x+1}{x-1}$ en $x=1$



$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-2x+1}{x-1} = +\infty$$

x	f(x)
0'9	8
0'99	98
0'999	998

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -\infty$$

x	f(x)
1'1	-12
1'01	-102
1'001	-1002

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

$$f(1) = \nexists$$

No coinciden. Por tanto, f <u>no</u> es continua en $x=1$.

d) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

x	$f(x)$
-0'1	1'2
-0'01	1'02
-0'001	1'002

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

x	$f(x)$
0'1	0'8
0'01	0'98
0'001	0'998

$f(0) = 1 - 0 = 1$

Como coinciden $f(0) = \lim_{x \to 0^s} f(x)$, f es continua en $x = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x}{x-1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

$$\lim_{x \to +1^-} x^2 + x = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \left(\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} \right) = +\infty$$

x	$f(x)$
1'1	10
1'01	100
1'001	1000

$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$

$\nexists f(1)$

f no es continua en $x = 1$

f) $g(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 3$.

$\lim_{x \to 3} g(x) = 3^3 - 3 + 1 = 27 - 3 + 1 = 25$

$g(3) = 25$

coinciden $\lim_{x \to 3} g(x)$ y $g(3) \Rightarrow g$ es continua en $x = 3$

Ejercicio 3:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-1}{x-2} \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{x-2} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x+1} \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{x+2}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty \end{cases}$$

CÁLCULOS

$\lim_{x\to -1^-}$

x	f(x)
-1'1	-9
-1'01	-99
-1'001	-999

$\lim_{x\to -1^+}$

x	f(x)
-0'9	11
-0'99	101
-0'999	1001

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x} \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty \end{cases}$$

Miércoles 27/5/20, Jueves 28/5/20 y Viernes 29/5/20:

Nos vemos en clase el miércoles a las 11h15 y vamos a ver lo que tenéis que hacer miércoles, jueves y viernes.

Vamos a ver los puntos:

1.8. Límites en el infinito.

1.9. Indeterminaciones

1.10. Asíntotas

Y tenéis que hacer los ejercicios 4, 5 y 6 que van quedando en la teoría. Si alguno no tiene los apuntes todavía, que me los pida al correo.