TAREAS DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS – 4º DE ESO (Del 15 al 23 de junio) – Carlos Ojeda

Si hay alguna duda, pregunta al correo: cojeda@iesvalledelsol.es.

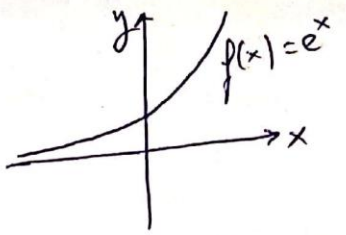
Hay que enviar fotos antes del martes 23/6/20 (incluido) de las derivadas que hagamos en clase y de las que se manden como ejercicio a cojeda@iesvalledelsol.es .

Lunes 15/6/20:

Corregid los ejercicios que se mandaron:

Ejercicio 6:

f) $f(x) = e^x$

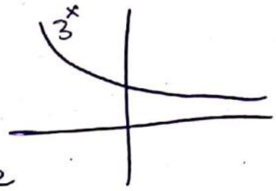


Asíntota vertical: No tiene

Asíntota horizontal: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \rightarrow$ No hay

g) $g(x) = 3^{-x}$

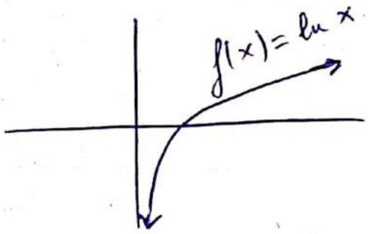


Asíntota vertical: No tiene

Asíntota horizontal: $\lim_{x \to -\infty} 3^{-x} = +\infty \rightarrow$ No tiene

$\lim_{x \to +\infty} 3^{-x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to +\infty$

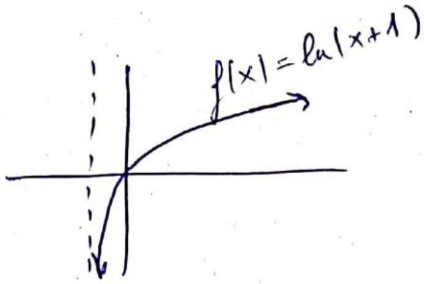
h) $f(x) = \ln x$



Asíntota vertical: En $x=0$

Asíntota horizontal: No tiene

i) $f(x) = \ln(x+1)$



Asíntota vertical: En $x=-1$

Asíntota horizontal: no tiene

j) $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-2}{x+3}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\rightarrow x=-3 \notin$ Rama $\rightarrow$ Dom $f: \mathbb{R}$

Asíntota vertical: No tiene

Asíntota horizontal: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2+x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x+3} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to +\infty$

(k) $h(x)=\begin{cases} 5^{3x}, & \text{si } x\leq 0 \\ \dfrac{-2x}{x-4}, & \text{si } x>0 \end{cases} \longrightarrow x=4 \in \text{Rama} \quad \rightarrow \text{Dom } h: \mathbb{R}-\{4\}$

Asíntota vertical en $x=4$: $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{-2x}{x-4} = +\infty$

$\lim_{x\to 4^+} \dfrac{-2x}{x-4} = -\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 5^{3x} = 0 \rightarrow$ A. horizontal en $y=0$ cuando $x\to -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{-2x}{x-4} = -2 \rightarrow$ A. horizontal en $y=-2$ cuando $x\to +\infty$

(l) $g(x)=\begin{cases} 4-\dfrac{1}{x}, & \text{si } x\leq 2 \\ x^2-3x+4, & \text{si } x>2 \end{cases}$ $\rightarrow x=0 \in \text{Rama} \quad \rightarrow \text{Dom } g: \mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical en $x=0$: $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} 4-\dfrac{1}{x} = 4 \rightarrow$ A. horizontal en $y=4$ cuando $x\to -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2-3x+4 = +\infty$

(m) $f(x)=\begin{cases} -x+4, & x<2 \\ \dfrac{4}{x}, & \text{si } 2\leq x<4 \\ e^{2x}, & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$ $\rightarrow x=0 \notin \text{Rama} \quad \rightarrow \text{Dom } f: \mathbb{R}$

A. vertical: No tiene

A. horizontal: No tiene

n) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+4}, & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{3x}{2-x}, & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ $\begin{matrix} \longrightarrow x = -4 \notin \text{Rama} \\ \longrightarrow x = 2 \notin \text{Rama} \end{matrix}$

Dom f: $[0, +\infty)$

A. vertical: No tiene

A. horizontal: $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+4} = 0 \rightarrow$ A. horizontal en $y=0$ cuando $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{2-x} = -3 \longrightarrow$ A. horizontal en $y=-3$ cuando $x \to +\infty$

Ejercicio 7: Halla la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\longrightarrow x = 0 \in$ Rama

$\rightarrow$ Dom $f: \mathbb{R} - \{0\}$

- En la 1ª rama, la función f no es continua en $x=0$ por anularse el denominador.

- En la 2ª rama, la función f es continua en toda la rama por ser una función polinómica.

En $x=1$: Para que f sea continua en $x=1$ tiene que cumplirse que $\underset{(1)}{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = \underset{(2)}{\lim_{x\to 1^+} f(x)} = \underset{(3)}{f(1)}$

(1) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{1} = 2$

(2) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^2 - 4\cdot 1 + 5 = 2$

(3) $f(1) = \frac{2}{1} = 2$

como se tiene la igualdad, f es continua en $x=1$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

La discontinuidad en $x=0$ es no evitable de salto infinito.

ⓑ $g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+2}, & \text{si } x \leq 0 \longrightarrow x=-2 \in \text{Rama} \\ \dfrac{2}{x-2}, & \text{si } x > 0 \longrightarrow x = 2 \in \text{Rama} \end{cases}$ $\rightarrow$ Dom g : $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- En la 1ª rama, la función g no es continua en $x=-2$ por anularse el denominador.
- En la 2ª rama, la función g no es continua en $x=2$ por anularse el denominador.

En $x=0$: Para que g sea continua en $x=0$ tiene que cumplirse que $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$

① $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \dfrac{-2}{0+2} = -1$

② $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \dfrac{2}{0-2} = -1$

③ $g(0) = \dfrac{-2}{0+2} = -1$

como se tiene la igualdad, g es continua en $x=0$.

Por tanto, g es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Las discontinuidades en $x=-2$ y en $x=2$ son no evitables de salto infinito.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{100x - 250}{x+5}, & \text{si } x > 5 \end{cases}$ $\rightarrow x = -5 \notin$ Rama

Dom f: $[0, +\infty)$

- En la 1ª rama, f es continua en toda la rama por ser una función polinómica.
- En la 2ª rama, f es continua en toda la rama porque el único punto donde se anula la función en $x = -5$ no pertenece a la rama (es más, no pertenece al dominio).

En $x = 5$:

1) $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 25$

2) $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \dfrac{500 - 250}{10} = 25$

3) $f(5) = 25$

Como se tiene la igualdad, f es continua en $x = 5$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$

d) $B(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 4x^2, & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 1 - \frac{4}{x-5}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $\longrightarrow x - 5 = 0 \longrightarrow x = 5 \in$ Rama

Dom f: $\mathbb{R} - \{5\}$

- En la 1ª rama, f es continua en toda la rama por ser una función polinómica $\frac{1}{2}x^2$.
- En la 2ª rama, f es continua en toda la rama por ser una función polinómica.
- En la 3ª rama, f <u>no</u> es continua en $x=5$ por anular el denominador.

Veamos la continuidad en los cambios de rama:

En $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} ① \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0^2}{2} = 0 \\ ② \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 = 0 \\ ③ f(0) = \frac{0^2}{2} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

En $x=4$:

$$\left.\begin{array}{l} ① \lim_{x \to 4^-} f(x) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 = 0 \\ ② \lim_{x \to 4^+} f(x) = 1 - \frac{4}{4-5} = 1 - \frac{4}{-1} = 1 + 4 = 5 \\ ③ f(4) = 0 \end{array}\right\} f \text{ no es continua en } x = 4$$

Luego, f es continua en $\mathbb{R} - \{4, 5\}$

En $x=4$, f tiene una discontinuidad no evitable de salto finito. Y en $x=5$, hay una discontinuidad no evitable de salto infinito.

e) $g(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dom g : $\mathbb{R}$

- En la 1ª rama, f es continua en toda la rama por ser una función exponencial (y el exponente es una función continua por ser una función polinómica)
- En la 2ª rama, f es continua en toda la rama por ser una función polinómica.

<u>En $x = 1$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} ①\ \lim_{x \to 1^-} g(x) = 3^1 = 3 \\ ②\ \lim_{x \to 1^+} g(x) = 1 - 6 + 8 = 3 \\ ③\ g(1) = 3 \end{array}\right\} \ g \text{ es continua en } x = 1$$

Por tanto, g es continua en $\mathbb{R}$

Ejercicio 8: Halla "a" para que la función sea continua:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax + 3 & , \text{ si } x \leq 1 \\ ax^2 - 6x + 5 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$

- En las dos ramas, f es continua en las ramas por ser funciones polinómicas.

En $x=1$: Para que f sea continua en $x=1$ tiene que cumplirse:

$$\underbrace{\lim_{x \to 1^-} f(x)}_{1} = \underbrace{\lim_{x \to 1^+} f(x)}_{2} = \underbrace{f(1)}_{3}$$

1 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 - 2a + 3 = 2 - 2a$

2 $\lim_{x \to 1^+} a - 6 + 5 = a - 1$

3 $f(1) = 2 - 2a$

Por tanto, se tiene que cumplir $a - 1 = 2 - 2a$:

$$3a = 3 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

Luego, para $a = 1$, la función es continua.

b)
$$B(t) = \begin{cases} at - t^2, & \text{si } t \leq 6 \\ 2t, & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

- En las dos ramas, B es continua en las ramas por ser funciones polinómicas.

- En $t=6$: Para que B sea continua en $t=6$ tiene que cumplirse $\lim_{t \to 6^-} B(t) = \lim_{t \to 6^+} B(t) = B(6)$
  1 2 3

1) $\lim_{t \to 6^-} B(t) = 6a - 36$

2) $\lim_{t \to 6^+} B(t) = 12$

3) $B(6) = 6a - 36$

Por tanto, se tiene que cumplir $6a - 36 = 12$

$6a = 48$

$\boxed{a = \frac{48}{6} = 8}$

Luego, para $a=8$, la función es continua.

ⓒ $g(x)=\begin{cases} x^2-3x+4, & \text{si } x\leq 2 \\ 4-\dfrac{a}{x}, & \text{si } x>2 \end{cases}$

- En la 1ª rama, g es continua en toda la rama por ser una función polinómica.
- En la 2ª rama, g es continua porque $x=0$ no pertenece a la rama (que es el único punto donde se anula el denominador).

En $x=2$:

① $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 4-6+4=2$

② $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 4-\frac{a}{2}$

③ $g(2)=2$

$\rightarrow 2=4-\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=2$

$\boxed{a=4}$

Luego, para $a=4$, la función es continua

Ejercicio 8:

(d)

$$h(x)=\begin{cases}1-2x^2, & \text{si } x\leq -1\\ x^2-2ax+3, & \text{si } -1<x\leq 1\\ -x^2+8x-15, & \text{si } x>1\end{cases}$$

- En las 2 ramas, h es continua en las ramas por ser funciones polinómicas.

En $x=-1$: Para que h sea continua en $x=-1$, tiene que cumplirse $\underset{①}{\lim_{x\to -1^-} h(x)} = \underset{②}{\lim_{x\to -1^+} h(x)} = \underset{③}{h(-1)}$

① $\lim_{x\to -1^-} h(x) = 1-2=-1$

② $\lim_{x\to -1^+} h(x) = 1+2a+3 = 4+2a$

③ $h(-1) = -1$

Tiene que cumplirse que $-1=4+2a \to -1-4=2a \to -5=2a \to$

$\to \boxed{a=\frac{-5}{2}}$

En $x=1$: Para que h sea continua en $x=1$, tiene que cumplirse

$$\underset{①}{\lim_{x\to 1^-} h(x)} = \underset{②}{\lim_{x\to 1^+} h(x)} = \underset{③}{h(1)}$$

① $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 1-2a+3 = 4-2a$

② $\lim_{x\to 1^+} h(x) = -1+8-15 = -8$

③ $h(1) = 1-2a+3 = 4-2a$

Tiene que cumplirse que: $4-2a=-8 \longrightarrow 2a=12 \to a=\frac{12}{2}=6$

Para que h sea continua en $x=-1$ tiene que ser $a=\frac{-5}{2}$ y para que h sea continua en $x=1$ tiene que ser $a=6$. Por tanto, no existe ningún valor de a para que h sea continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1

ⓐ $y = x^3 + x^2 + x \longrightarrow y' = 3x^2 + 2x + 1$

ⓑ $y = 3x^2 - 2x + 1 \longrightarrow y' = 6x - 2$

ⓒ $y = x^3 - 1 \longrightarrow y' = 3x^2$

ⓓ $y = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \longrightarrow y' = 4x - \frac{3}{3}x^2 \longrightarrow y' = 4x - x^2$

ⓔ $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x^4 + 12x^3}{2} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^4}{2} + \dfrac{12x^3}{2} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^4}{2} + 6x^3$

$f'(x) = \dfrac{2x}{2} - \dfrac{20x^3}{2} + 18x^2$

$f'(x) = x - 10x^3 + 18x^2$

Miércoles 17/6/20, jueves 18/5/20, viernes 19/5/20 y lunes 22/9/20:

Nos vemos en clase el miércoles a las 11h15 y vamos a ver lo que tenéis que hacer miércoles, jueves, viernes y lunes.

Vamos a seguir con derivadas.